

**МАТУРСКА ПИТАЊА**

**МАТЕМАТИКА**

1. Ако је  $a + a^{-1} = 3$ , израчунати  $a^4 + a^{-4}$ .
2. Ако је  $x + y = u$ ,  $xy = v$ , изразити  $x^5 + y^5$  помоћу  $u$  и  $v$ .
3. Ако је  $\frac{x^2+x^{-2}}{x^2-x^{-2}} = a$ , изразити  $\frac{x^4+x^{-4}}{x^4-x^{-4}}$  помоћу  $a$ .
4. Упростити израз:  $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ .
5. Израчунати:  $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ .
6. Израчунати:  $\sqrt{7-\sqrt{48}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}$ .
7. Израчунати:  $(6 + \sqrt{35})(\sqrt{14} - \sqrt{10})\sqrt{6} - \sqrt{35}$ .
8. Израчунати:  $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}} + \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}}$ .
9. Ако је  $a = (3 + 2\sqrt{2})^{-1}$  и  $b = (3 - 2\sqrt{2})^{-1}$ , израчунати  $(a + 1)^{-1} + (b + 1)^{-1}$ .
10. Ако је  $a = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$  и  $b = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ , израчунати  $((a + a^{-1}) + (b + b^{-1}))^{\frac{1}{2}}$ .
11. Ако је  $a$  реалан број различит од нуле, израчунати:  $a^{-1} (1 + a^{-2})^{-0,5} (1 + a^2)^{0,5}$ .
12. Израчунати:  $\frac{(0,27)^0 - (0,2)^{-1}}{\left(\frac{5}{23}\right)^{-1} \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \left(\frac{-2}{5}\right)^{-1}}$ .
13. Решити једначину по  $x$ :  $\left(0,72 - \left(10 - \frac{9,99999}{1,1-x}\right) \cdot 0,625\right) : \frac{9}{40} = \frac{7}{10}$ .
14. Ако је  $p = 2 + \frac{(1,75 \cdot \frac{2}{3} - 1,75 \cdot \frac{9}{8}) : \frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80} - 0,0325\right) : 400} : (6,49 : 0,7 + 0,3)$  решити следећу једначину по  $x$ :  $2 + 48x = p(1 - x)$ .

**МАТУРСКА ПИТАЊА**

15. Одредити број чијих је 12% једнако 4,2% броја:

$$\frac{3 + 4,2 : 0,1}{(1 : 0,3 - \frac{7}{3}) \cdot 0,125}$$

16. Концентрат сока садржи 75% воћног екстракта. Додавањем воде добија се разблажени сок који треба да садржи 15% воћног екстракта. Колико литара концентрата треба да би се добило 40l разблаженог сока?
17. За колико процената се повећа површина квадрата ако се његов обим повећао за 25%?
18. Кисела вода је поскупела 15%. Колико се те воде може сада купити за новац којим се пре поскупљења могло купити 368l?
19. У прва четири месеца, једна апотека остварила је 10% већи профит од планираног, док је наредна четири месеца профит био 17% мањи од планираног. Колики профит мора бити у последња четири месеца да би се реализовао планирани годишњи профит?
20. Пре загревања раствора соли у води његова концентрација је била 13%, а после је 25%. За колико процената се загревањем смањила количина раствора?
21. Ако се помеша 70 литара 72% алкохола са 40 литара 96% алкохола, колико литара воде треба додати, па да се добије раствор од 48% алкохола?
22. Имамо две смеше злата и сребра. У првој смеси количине ових метала односе се као 1 : 13, а у другој 3 : 5. Колико треба узети од сваке смеше да би се добило 17kg нове смеше у којој ће злато и сребро бити у размери 3 : 11?
23. Ако је  $a$  реалан позитиван број, израчунати:

$$\frac{(a+1)^4 - 1}{a(a+2)} - (a+1)\sqrt{\frac{(a+1)(a^3+1)}{a^2 - a + 1}}$$

**МАТУРСКА ПИТАЊА**

24. Израчунати:

$$\left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} - \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}}.$$

25. Израчунати:

$$\frac{a - a^{-2}}{\sqrt{a} - \sqrt{a^{-1}}} - \frac{1 - a^{-2}}{\sqrt{a} + \sqrt{a^{-1}}} - \sqrt{a}.$$

26. Израчунати:

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \left( \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{(ab)^{-\frac{1}{2}}} \right) (a - b)^{-1}.$$

27. Одредити реалан број  $m$  тако да остатак при дељењу полинома  $x^2 + mx + 2$  са  $x - 1$  буде три пута већи него при дељењу истог полинома са  $x + 3$ .

28. Решити једначину:  $|x + 2| + |x - 1| = |x + 3|$ .

29. Решити једначину:  $3 + |x - 6| = |x - 3|$ .

30. Решити неједначину:  $|x - 1| + |2x - 6| < 3$ .

31. Одредити  $p$ , реалан број, тако да график функције

$$f(x) = (p - 1)x^2 - (p + 8)x + p + 5,$$

додирује  $x$ -осу и да функција  $f$  има максимум.

32. Графици свих функција

$$f(x) = -x^2 + 2(m + 1)x + 3m - 1 \quad (m \in \mathbb{R})$$

пролазе кроз тачку  $A$ . Наћи координате тачке  $A$ , а затим одредити  $m$  за које график функције  $f$  има теме у тачки  $A$ .

33. Одредити све вредности  $m$  тако да минимум функције

$$f(x) = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 5m$$

буде мањи од  $-1$ .

**МАТУРСКА ПИТАЊА**

34. За које вредности реалног броја  $k$  једначина по  $x$ :

$$\frac{2x}{x+2} + \frac{kx+2}{x^2-4} = \frac{x-1}{x-2},$$

нема реалних решења?

35. За разне вредности реалног броја  $a$  ( $a \neq 2$ ) одредити природу решења једначине  $(a-2)x^2 - (a+2)x + (a+2) = 0$ .

36. Наћи квадратну једначину облика  $x^2 + px + q = 0$ , чија решења  $x_1$  и  $x_2$  задовољавају:

$$3(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = -9, \quad 5(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 = 47.$$

37. Нека су  $\alpha$  и  $\beta$  решења једначине  $kx^2 - (2k+1)x + 1 = 0$ . Одредити реалан број  $k$  тако да буде:

$$(i) \alpha^2 + \beta^2 = 3; \quad (ii) \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = -1; \quad (iii) \alpha^{-1} + \beta^{-1} = 5.$$

38. Ако су  $\alpha$  и  $\beta$  нуле функције

$$f(x) = kx^2 - (k+3)x + k + 4 \quad (k \in \mathbb{R}, k \neq 0, k \neq -1),$$

изразити  $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta}$  у зависности од  $k$ .

39. Решити једначину:  $|x^2 - 4| - 2|x^2 - 9| = 14 - x^2$ .

40. Решити једначину:  $x^2 - |5x - 3| - x = 2$ .

41. Одредити  $a$  тако да је неједнакост

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 2$$

тачна за сваки реалан број  $x$ .

42. Решити систем једначина:  $x + y - 4 = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x = 0$ .

43. Решити систем једначина:  $5x + 7y = 61, \quad xy = 8$ .

**МАТУРСКА ПИТАЊА**

44. Решити систем једначина:  $x^2 + xy + y^2 = 4$ ,  $x + xy + y = 2$ .
45. Решити систем једначина:  $x + xy + y = 5$ ,  $x^2y + xy^2 = 6$ .
46. Решити систем једначина:  $x^2 + xy + y^2 = 19$ ,  $x^2 - xy + y^2 = 7$ .
47. Решити једначину:  $\sqrt{3-x} = x - 5$ .
48. Решити једначину:  $\sqrt{9+x^2} = x + 1$ .
49. Решити једначину:  $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 5$ .
50. Решити једначину:  $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1$ .
51. Решити једначину:  $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 = 5x$ .
52. Решити једначину:  $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 11} = 1$ .
53. Решити једначину:  $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = \frac{5}{2}$ .
54. Решити једначину:  $13^x = 12^{x-1} + 12^x$ .
55. Решити једначину:  $6^{x+1} + 7 \cdot 4^{x+1} = 4^{x+3} - 28 \cdot 6^{x-1}$ .
56. Решити једначину:  $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ .
57. Решити једначину:  $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$ .
58. Решити једначину:  $3 \cdot 18^x + 2 \cdot 8^x = 5 \cdot 12^x$ .
59. Решити једначину:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2}} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{1}{18}} = 1$ .
60. Решити једначину:  $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = -288$ .

**МАТУРСКА ПИТАЊА**

61. Решити једначину:  $\sqrt[3]{729} = 243 \cdot 3^{-x}$ .
62. Решити једначину:  $\left(\frac{7}{2}\right)^{x+1} \left(\frac{4}{49}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{7}{2}\right)^9$ .
63. Решити једначину:  $4^{4x+8} - 5 \cdot 4^{2x+5} + 64 = 0$ .
64. Решити једначину:  $\left(\sqrt{5 + \sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5 - \sqrt{24}}\right)^x = 10$ .
65. Ако је  $\log_{10} 3 = a$  и  $\log_{10} 11 = b$ , израчунати  $\log_9 2, 97$ .
66. Решити једначину:  $\log x - \log \frac{1}{x-1} - \log 56 = 0$ .
67. Одредити домен функције:  $f(x) = \log_{3-x}(15x - 25 - 2x^2)$ .
68. Решити једначину:  $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$ .
69. Решити једначину:  $\log_{3x+4}(4x^2+4x+1) + \log_{2x+1}(6x^2+11x+4) = 4$ .
70. Решити једначину:  $\log_5 (26 - 5^{1-x}) = 1 + x$ .
71. Ако је  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$  и  $0 < \alpha < \pi$ , израчунати:  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ .
72. Ако је  $\operatorname{tg} x = 3$ , израчунати:  $\frac{2 \sin 2x - 3 \cos 2x}{4 \sin 2x + 5 \cos 2x}$ .
73. Ако је  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  и  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , израчунати:  $\cos \frac{\alpha}{2}$ .
74. Ако је  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$ , израчунати:  $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x$ .
75. Ако је  $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ , израчунати:  $\sin^3 x - \cos^3 x$ .
76. Ако је  $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ , израчунати:  $\sin 3x + \cos 3x$ .
77. Израчунати:  $\frac{\cos \frac{19\pi}{6} \sin \frac{14\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{17\pi}{4}}{\operatorname{ctg} \frac{10\pi}{3} \cos \frac{7\pi}{4} \sin \frac{8\pi}{3}}$ .
78. Израчунати:  $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 75^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$ .

**МАТУРСКА ПИТАЊА**

79. Решити једначину:  $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \cos 2x = 0$ .
80. Решити једначину:  $\sin^2 x - 15 \cos^2 x = 1$ .
81. Решити једначину:  $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ .
82. Решити једначину:  $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$ .
83. Решити једначину:  $3 \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 2\sqrt{3} \sin x \cos x$ .
84. Решити једначину:  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ .
85. Решити једначину:  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = -2$ .
86. Решити једначину:  $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos x$ .
87. Решити једначину:  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ .
88. Дати су кругови  $(x - 2)^2 + y^2 = 9$  и  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ . Наћи једначине њихових заједничких тангенти.
89. Наћи једначину круга чији је центар на правој  $4x - 5y - 3 = 0$  и који додирује праве  $2x - 3y - 10 = 0$  и  $3x - 2y + 5 = 0$ .
90. Написати једначину круга који садржи тачку  $(1, 0)$  и који додирује две паралелне праве  $2x + y + 2 = 0$  и  $2x + y - 18 = 0$ .
91. Наћи једначине кругова који додирују три дате праве:  $3x + 4y - 35 = 0$ ,  $3x - 4y - 35 = 0$  и  $x - 1 = 0$ .
92. Одредити геометријско место средина тетива параболе  $y^2 = 4x$  које су паралелне правој  $x + y + 3 = 0$ .

**МАТУРСКА ПИТАЊА**

93. Права  $x - 2y - 6 = 0$  сече параболу  $y^2 = 2x$  у двама тачкама. Одредити једначине тангенти параболе у тим тачкама.
94. Под којим се углом види парабола  $y^2 = 16x$  из тачке  $(-4, -2)$ .
95. Одредити тачку која припада елипси  $8x^2 + 18y^2 = 144$  и која је најближа правој  $2x - 3y + 25 = 0$ , а затим одредити њено одстојање од праве.
96. Наћи једначине тангенти конструисаних из тачке  $(-5, 4)$  на елипсу  $4x^2 + 25y^2 = 100$ .
97. Наћи заједничке тангенте елипси  $9x^2 + 16y^2 = 144$  и  $16x^2 + 9y^2 = 144$ .
98. Одредити  $f(x)$  ако је  $\frac{1}{2}f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ .
99. Одредити  $f(x)$  ако је  $f\left(\frac{x-1}{x+2}\right) + 2f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = x$ .
100. Одредити  $f(x)$  и  $g(x)$  ако је:
- $$f\left(\frac{x}{x+1}\right) + g(x+2) = 2x, \quad f\left(\frac{x}{x+1}\right) - g(x+2) = x$$
101. Ако је  $f(x-1) = x^2$ , наћи  $f(x)$ ,  $f(x+1)$  и  $f^{-1}(x)$  за  $x \geq -1$ .
102. Одредити инверзну функцију функцији:  
 (i)  $f(x) = 5x - 3$ ; (ii)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ; (iii)  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ .
103. Одредити инверзну функцију функцији:  
 (i)  $f(x) = 3^x$ ; (ii)  $f(x) = 2^{-x}$ ; (iii)  $f(x) = 2^x + 7$ .
104. Одредити инверзну функцију функцији:  
 (i)  $f(x) = 3 + \log_2(x^2 - 1)$ ,  $x > 1$ ; (ii)  $f(x) = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

**МАТУРСКА ПИТАЊА**

105. Одредити инверзну функцију функцији:

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \quad a > 1, \quad x \leq 0.$$

106. Написати развој бинома: (i)  $(2x + 5)^4$  (ii)  $(x + \frac{1}{x})^5$ .

107. Наћи пети члан у развоју бинома  $(2\sqrt{x} - x\sqrt{8})^{10}$ .

108. Наћи средњи члан у развоју бинома  $(\frac{1}{x} - \sqrt{x})^8$ .

109. Одредити  $x$  тако да четврти члан у развоју бинома  $(3x - \frac{1}{9x^2})^8$  буде једнак  $-56$ .

110. Наћи рационалне чланове у развоју бинома  $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$  и одредити који су по реду.

111. Наћи члан у развоју бинома  $(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{3}})^n$  који садржи  $x^5$  ако је збир коефицијената тог развоја једнак 128.

112. Одредити  $x$ , тако да трећи члан у развоју бинома

$$\left(2\sqrt[3]{2^{-1}} + \frac{4}{4^{-x}\sqrt{4}}\right)^6$$

буде једнак 240.

113. Колико чланова аритметичког низа, чији је први члан 7, а разлика 5, треба сабрати да би се добио збир једнак 243.

114. Решити једначину по  $x$ :  $3 + 10 + 17 + \dots + x = 345$ .

115. Наћи аритметички низ  $(a_n)$  за који је:  $S_2 - S_4 + a_2 = 1$ ,  $S_3 + a_3 = 17$ , где је  $S_n$  сума првих  $n$  чланова низа.

**МАТУРСКА ПИТАЊА**

116. Ако је збир првих  $n$  чланова аритметичког низа  $2n + 3n^2$ , одредити двадесети члан тог низа.
117. Нека су  $(a_n)$  и  $(b_n)$  два аритметичка низа и нека  $S_n$  и  $\sigma_n$  означавају суме првих  $n$  чланова тих низова. Ако је  $(4n + 27)S_n = (7n + 1)\sigma_n$ , израчунати  $\frac{a_{11}}{b_{11}}$ .
118. Између бројева  $\frac{1}{4}$  и  $-\frac{39}{4}$  уметнути 19 бројева  $x_1, x_2, \dots, x_{19}$  тако да  $\frac{1}{4}, x_1, x_2, \dots, x_{19}, -\frac{39}{4}$  буду узастопни чланови аритметичког низа. Израчунати  $x_i, i = 1, 2, \dots, 19$ .
119. Одредити шест узастопних чланова геометријског низа ако је збир прва три члана 112, а последња три 14.
120. Четири позитивна броја чине узастопне чланове геометријског низа. Наћи те бројеве ако је први већи од другог за 36, а трећи од четвртог за 4.

